

3. tétel: Osztathóság, prímek, számrendszerök

I. Osztathóság:

- Def.: $a|b$, ha $\exists q \in \mathbb{N} : b = q \cdot a$ ($a, b \in \mathbb{N}$)
- Minden szám ellentéte kivonásban viselkedik
 $\frac{0}{0}$ nem értelmezett, de $0|0$ igen
Positívakra $a \leq b$
- Reflexív: $a|a$
- Transzitív: $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b$, $a|c \Rightarrow a|(b+c)$ és $a|(b-c)$, $a|b \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|b \cdot d$; $a|1 \Rightarrow a=1$; $a|b$, $b|a \Rightarrow a=b$

II. Osztók száma:

- 1 osztó: 1; 2 osztó: prím; több osztó: összetett szám
- 0-nak ∞ osztója van
- Négyzetszámok: páratlanok osztó (+ a 0)
- Osztók száma: $a = p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n} \rightarrow d(a) = (x_1+1) \cdots (x_n+1)$

III. Osztathósági szabályok:

- 3/9: számjegyek összege osztatható 3-mal / 9-cel
- 2ⁿ: utolsó n számjegy osztatható 2ⁿ-nel
- 11: páros helyiértékek = páratlan helyiértékek számjegyek összege
- 5/10: utolsó számjegy osztatható 5-tel / 10-zel
- Összetett számokra: pl. 6 osztja a-t, ha 2 és 3 is

IV. Két szám kapcsolata:

- legnagyobb közös osztó: a és b-re a legnagyobb k, melyre k|a és k|b
- legkisebb többszörös: a és b-re a legkisebb k, melyre ak|a és bk|b
- $\text{lcm}(a, b) \cdot \text{lkt}(a, b) = ab$

V. Prím számok:

- Csak sok prím van, többfélél bizonítás (tétel)
- Ikerprímek: különbségük 2; nem tudjuk, hogy cs van-e (törénet)
- Alkalmi minden nagy 'hézag' lehet két prím között (tétel)
- Relatív prímek: $\text{lcm} = 1$, $\text{ekt} = ab$

VI. Tételek / Bizonítások:

- Maradékos osztás:
 $a, b \in \mathbb{N}, a > b$; $k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < b$
 $\hookrightarrow \exists! \quad a = b \cdot k + r$
- Wilson - tétel: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
- Kis - Fermat - tétel: $a^p \equiv 1 \pmod{p}$
- Számelmélet alapöttele: minden szám egyértelműen

VII. Számrendszerök:

- Alaki érték: a
- Helyérték: 'első'
- g alapú számrendszerben: $n = \alpha_k \cdot g^k + \alpha_{k-1} \cdot g^{k-1} + \dots + \alpha_1 \cdot g^1 + \alpha_0 \cdot g^0$
- Fontos számrendszerök: 2, 10, 12, 16, 60

abcde

VIII. Történet:

- Eratószthenész szíta
- Hindu eredetű 10-es számrendszer
- Fermat

IX. Alkalmazás:

- Prím: RSA, véletlen-szám generátor
- Számrendszerök:
 - 2: számítástechnika
 - 8: transziszterekek
 - 16: RGB színkód