

9. tétel: Számsorozatok, tulajdonságaik

I. Sorozat:

- Definíció: a_n , függvény $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- Megadás: - explicit képlet: $a_n = 7n + 6$
- rekurzív képlet: $a_0 = 6; a_{n+1} = a_n + 7$
n-edrendű, akkor n kezdő tag
- körülírás: n. tag = n. prímszám
- Diszkrét függvényként ábrázolható
- Jellemzés: - monotonitás (pl. ha $\forall i \geq 1$ -re $a_i \geq a_{i-1} \rightarrow$ mon. növe)
- korlátosság (pl. $\exists k: \forall i$ -re $a_i < k \rightarrow$ felülről korlátos)
- valós számok esetén sup: legkisebb felső korlát } axiómából
inf: legnagyobb alsó korlát }
- minimum, maximum

II. Konvergencia:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists K: \forall n > K: |A - a_n| < \epsilon$ KONVERGENS
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, ha $\forall M > 0$ -hoz $\exists K: \forall n \geq K: a_n \geq M$ TART A ∞ -HEZ
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, ha $\forall M < 0$ -hoz $\exists K: \forall n \geq K: a_n \leq M$ TART A $-\infty$ -HEZ
- Divergens: nem konvergens vagy
 $\forall A: \exists \epsilon > 0$, melyre $[A - \epsilon; A + \epsilon]$ -on kívül ∞ -sok tag van
- Tétel: egy sorozatnak legfeljebb 1 határértéke lehet
- Tétel: ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos
- Tétel: ha egy sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens
- Tétel: ha a_n, b_n konvergens és $\forall n: a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$
- Rendőr-elv: ha a_n, c_n konvergens $\rightarrow A$ és $\forall n: a_n \leq b_n \leq c_n$
 $\Leftrightarrow b_n \rightarrow A$
- Ha $a_n \rightarrow A, b_n \rightarrow B$
 - $c_n = a_n + b_n \Rightarrow c_n \rightarrow A + B$
 - $d_n = a_n \cdot b_n \Rightarrow d_n \rightarrow AB$
 - $e_n = a_n \cdot c \Rightarrow e_n \rightarrow cA$
 - $f_n = a_n / b_n \Rightarrow f_n \rightarrow A/B$, ha ∞ -sokszor értelmezett

