10. tétel: Mértani sorozat, kamatszámítás, exponenciális folyamatok

I. Mértani sorozat:

- Definíció: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = Q$ (kvóciens) vagy
  $a_{n+1} = Q \cdot a_n$ (így lehet $a_i = 0$ is)

-

	$Q < 0$	$Q > 0$
$\|Q\| > 1$	oszcillálva divergens	tart a ∞-hez
$\|Q\| < 1$	oszcillálva konvergens	konvergens

- Explicit képlet: $a_n = a_1 \cdot Q^{n-1}$

- $\sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}} = |a_n|$

- Első n tag összege: $S_n = \frac{a_1(Q^n - 1)}{Q - 1}$ ha $Q \neq 1$

  $S_n' = a_1 \cdot n$ ha $Q = 1$

- Első n tag szorzata: $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1^n \cdot Q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

- $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \underset{|Q|<1}{=} \frac{a_1}{1-Q}$ (pl. $0,999\ldots = 1$)

II. Kamatszámítás:

- Egyszerű kamatszámítás: a kamat nem tőkésedik

  a_0: kezdőtőke
  p: kamatláb (pl. 10)
  n: időtartam (pl. 5 év)

  $a_n = a_0 + a_0 \cdot n \cdot \frac{p}{100}$

- Kamatos kamatszámítás: periódus végén tőkésedik a kamat

  $a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, teljes indukcióval bizonyítható

- Gyűjtőjáradék: minden periódus végén teszünk be pénzt (törlesztőjáradék is hasonló)

  a: annuitás
  $Q = 1 + p/100$

  $S_n = a \cdot Q \cdot \frac{Q^n - 1}{Q - 1}$

  Bizonyítás: első évi 'a' $\rightarrow$ $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$
  második 'a' $\rightarrow$ $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$
  ...

  $a \cdot \frac{(1 + p/100)^{n+1} - (1 + p/100)}{1 + p/100 - 1}$

  Vagy: $((a(1 + p/100) + a)(1 + p/100) + a) \ldots \cdot (1 + p/100)$ = ugyanaz az összeg