15. tétel: Egybevágóság és hasonlóság. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában.

I. Egybevágóság

- Két alakzat egybevágó, ha létezik egybevágósági transzformáció (távolságtartó geometriai transzformáció), amely egyiket a másikba viszi.
    - Geometriai transzformáció: függvény, amely értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz
- Tulajdonságok: távolságtartó, szögtartó, elvivalenciareláció ($A \cong A; A \cong B \iff B \cong A; A \cong B$ és $A \cong C \implies B \cong C$)

- Tengelyes tükrözés: adott t tengely, P-hez P'-t rendeli, hogy PP' felezőmerőlegese t (P ∉ t)
    - Fixpont: t tengely pontjai; Fix alakzat: t-re tengelyesre szimmetrikus idomok
    - Egyenestartó, távolságtartó, szögtartó, nem irányítástartó, kölcsönösen egyértelmű
- Középpontos tükrözés: adott O pont, P-hez P'-t rendeli, hogy PP' felezőpontja O
    - Fixpont: O; Fix alakzat: O-ra középpontosan szimmetrikus idomok
    - Egyenestartó, távolságtartó, szögtartó, irányítástartó, kölcsönösen egyértelmű
- Forgatás: adott O pont (centrum), α szög és (+ vagy -) irány, P-hez P'-t rendeli hozzá, hogy POP' szög (megfelelő irányú) α és PO=P'O
    - Fixpont: O; Fix alakzat: O-ra α-val forgásszimmetrikus idomok (?)
    - Egyenestartó, távolságtartó, szögtartó, irányítástartó, kölcsönösen egyértelmű
    - Ha a forgatás szöge nem nagyobb, mint 90 fok, akkor bármely egyenes és a képegyenes által bezárt szög megegyezik az elforgatás szögével.
- Eltolás: adott v vektor, P-hez P'-t rendeli hozzá, hogy PP' vektor v
    - Fixpont nincs; Fix alakzat: v-vel párhuzamos egyenesek
    - Egyenestartó, távolságtartó, szögtartó, irányítástartó, kölcsönösen egyértelmű

- Két tengelyes tükrözés párhuzamos tengelyekkel: eltolás
- Két tengelyes tükrözés metsző tengelyekkel: forgatás
- Két középpontos tükrözés: eltolás
- Több eltolás: 1 eltolás; Több forgatás (adott centrum): egy forgatás (adott centrummal)

- Háromszögek egybevágóságának alapesetei:
    - Oldalak hossza páronként egyenlő
    - Két-két oldal és a közbezárt szög egyenlő
    - Két-két oldal és a hosszabbal szemközti szög egyenlő
    - Egy-egy oldal és bármely két megfelelő szög egyenlő

II. Hasonlóság

- Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzathoz a másikat rendeli
    - Hasonlósági transzformáció: véges sok középpontos hasonlóság és véges sok egybevágósági transzformáció egymásutánja.
- Középpontos nagyítás/hasonlóság: Egy P pont képe a középpontos hasonlóságban a pontot az O középponttal összekötő egyenesen, a középponttól $|\lambda|PO$ távolságra fekszik; ha λ pozitív, akkor P irányában, ha λ negatív, akkor az ellenkező irányban. A középpontos hasonlóság kicsinyítés, ha $|\lambda|<1$, és nagyítás, ha $|\lambda|>1$.
    - Tulajdonságok: egyenestartó, szögtartó, irányítástartó, aránytartó, ekvivalenciareláció ($A \sim A; A \sim B \iff B \sim A; A \sim B$ és $A \sim C \implies B \sim C$)

    - Fixpont: O; Fix alakzat: O-n átmenő egyenesek

- Hasonló alakzatok (bármely kettő hasonló): pl. szakasz, kör, négyzet, parabola

- Háromszögek hasonlóságának alapesetei:
    - megfelelő oldalainak aránya páronként egyenlő
    - két -két megfelelő oldaluk aránya és az ezek által közbe zárt szögeik egyenlők
    - két-két szögük páronként megegyezik
    - két-két megfelelő oldaluk aránya és a nagyobb oldalakkal szemközt lévő szögeik egyenlők

- Párhuzamos szelők tétele: Ha egy szög szárait párhuzamos egyenesekkel metszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.
    - Ekvivalens: $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$; középpontos nagyítás egyenestartó (egyikből következik a másik kettő)

III. Geometriai tételek hasonlósággal bizonyítva

- Magasságtétel
- Befogótétel
- Szögfelezőtétel
- Ptolemaiosz-tétel

IV. Alkalmazás

- Galilei-féle négyzetes/köbös törvény: Ha A és B oldalainak aránya x, területeik aránya x^2, térfogataik aránya x^3

- Közegellenállás: hasonló testekre (adott sebesség esetén) homlokfelület aránya és közegellenállási erő aránya megegyezik

V. Történet

- Euklidesz – Elemek: „egyenlő és hasonló”

- Hilbert (axiomatikus geometria): geometriai alapfogalom, egybevágósági axiómák