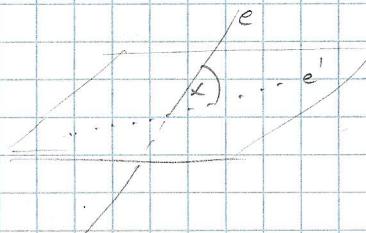
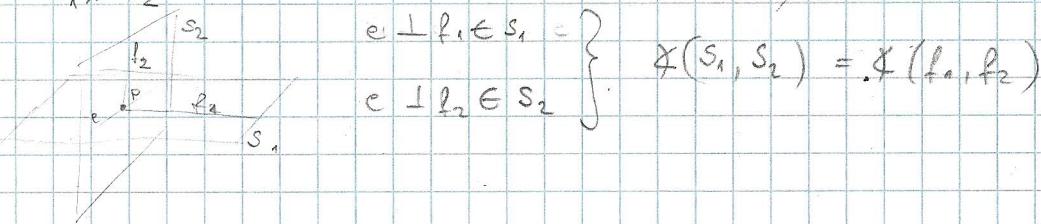


## 20. tétel: Térelemek hajlászöge, távolsága, alakzatok

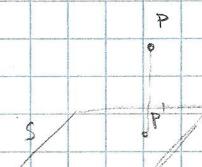
### I. Térelemek hajlászöge:

- Pont, egyenes, sík
- Egyenesek hajlászöge
  - egy síkban: ismerjük a szöget
  - kitérő:
  - párhuzamos:  $0^\circ$
- Egyenes és sík hajlászöge
  - merőlegesség: egyenes merőleges egy síkra, ha a sík minden egyenesére is
  - $e \perp f_1, g, f_1, g \in S \Rightarrow e \perp S$
  - párhuzamosság: egyenes párhuzamos a sík minden egyenesével is
  - $e \nparallel S, e \perp S$ :
- Síkok hajlászöge
  - $S_1 \parallel S_2: \gamma = 0^\circ$
  - $S_1 \nparallel S_2:$



### II. Térelemek távolsága:

- Ha metrők:  $d = 0$
- Pont - pont, pont - egyenes: síkban van
- Pont - sík:  $d(P, S) = PP'$ , ahol  $P'$ :  $P$  vetülete  $S$ -re
- Egyenes - egyenes: -ha "metrő" vagy párhuzamos  $\rightarrow$  síkban van  
-ha kitérő  $\rightarrow$  normál transzverzális:
- Egyenes - sík:  $e \parallel S \Rightarrow d(e, S) = d(P, S)$ , ahol  $P \in e$
- Sík - sík:  $S_1 \parallel S_2 \Rightarrow d(S_1, S_2) = d(P, S_2)$ , ahol  $P \in S_1$



### IV. Alkalmazások:

- Fizikában: felülről  $\rightarrow$  nyomás, felületi feszültség, fluxus, keresztmetszetek  
térfogat  $\rightarrow$  sűrűség
- Kémiaban: térfogat  $\rightarrow$  koncentráció
- Számítógépes grafika: csomagcikluslatótér



### III. Térbeli alakzatok, - felszínek, térfogatuk:

- **Térfogat:**
  - nemnegatív jellemzője a térbeli alakzatoknak
  - két részre osztva egy testet a térfogatok összege a teljes térfogat
  - egy ség négyzet térfogata 1
  - egybevágóságra invariáns
- **Gömb:**
  - $A = 4\pi r^2 \pi$
  - $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \pi$
- **Poliéder:**
  - síklapokkal határolt test
  - $A = \sum T_k$
  - $V = \sum V_i$
- **Hasáb:** veszünk egy sokszöget, eltoljuk a síkjával nem  $\parallel$  vektorral
  - Egyenes  $v \perp S$   $A = 2\pi + m \cdot k$   $V = T \cdot m$
  - Ferde  $v \not\perp S$   $A = 2T + \text{palást}$   $V = T \cdot m$
  - Paralelepipedon: parallelogramma minden oldala,  $V = l(a \times b) \cdot c$
  - Téglatest: téglalap minden oldala
  - Kocka: egyenlő minden él



- **Henger:** veszünk egy kört, eltoljuk a síkjával nem  $\parallel$  vektorral

- Egyenes	$v \perp S$	$A = 2\pi r^2 \pi + 2r\pi m$	$V = r^2 \pi m$
- Ferde	$v \not\perp S$	$A = 2r\pi + \text{palást}$	$V = r^2 \pi m$



- **Gúla:** sokszög alap, csúcsai egy nem síkbeli csúcsral összekötve



- Egyenes	$P$ csúcs $\perp$ vethete a szim. kp.	$\left. \begin{array}{l} \text{ha az alapnak} \\ \text{a szim. kp.-ja} \end{array} \right\}$	$A = T + \text{palást}$
- Ferde	$P$ csúcs $\perp$ vethete nem a szim. kp.	$\left. \begin{array}{l} \text{ha az alapnak} \\ \text{nem a szim. kp.-ja} \end{array} \right\}$	$V = \frac{1}{3} T \cdot m$



- **Csonkagúla:** gúlaból alaplappal  $\parallel$  síkkal levágva egy kisebb gúla

$$- A = T + t + \text{palást} \quad - V = \frac{1}{3}(T + \sqrt{Tt} + t)$$

- **Kúp:** körralap, pontjai egy nem síkbeli csúcsral összekötve

- Egyenes	$P$ csúcs $\perp$ vethete a körr kp-ja
- Ferde	$P$ csúcs $\perp$ vethete nem a körr kp-ja



- **Csonkakúp:** kúpból az alaplappal  $\parallel$  síkkal levágva egy kisebb kúp

$$- A = \pi(R^2 + r^2 + a(R+r)) \quad - V = \frac{\pi m}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$



### IV. Tételek, bizonyítások:

- **Térfogatok, felszínek** (Paralelepipedon, csonkagúla)
- **Fordítottak térfogatainak számítása integrálással**