22. tétel: Kombinatorikus modell, Kombináció, Hipergeom. e., ...

I. Kombináció:

- Kombináció: n objektumból k kiválasztásának lehetősége, sorrend nem számít
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k} = \frac{\text{'k kiválasztása}: n\cdot(n-1)\ldots(n-k-1)\text{'}}{\text{'k sorrendje}: k\cdot(k-1)\ldots 1\text{'}}$

II. Binomiális tétel:

- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\cdot b^i$
- Hány darab 'b' van az ndb tényezőből, hányféleképpen áll elő → binomiális együtthatók

III. Pascal-háromszög:

- n. sor k. eleme = (n-1). sor (k-1). és k. eleme (+ szél)
- Binomiális együtthatók, mert:
  - Teljesülnie kell, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
  - n-ből k kiválasztása: (n-1)-ből k és (n-1)-ből (k-1) és az n.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

$\underbrace{\qquad}_{n-1}\ \ \underset{n.}{\circ}$

IV. Valószínűségszámítás kombinatorikus modellje:

- Kedvező esetek száma: k
- Összes eset száma: ö
- Ha minden eset azonos valószínűségű!

$\left.\right\} p = \frac{k}{ö}$

V. Hipergeometrikus eloszlás:

- Visszatevés nélküli mintavétel
- N összes, M jó, n eset → 3 paraméter
- $P(x=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ n húzás, abból k db M
- $E(x) = n\cdot\frac{M}{N}$
- $D(x) = \sqrt{E(x^2) - E^2(x)} = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}$

VI. Tételek / bizonyítások:

kombinatorikus teljes indukciós

- Pascal-háromszög tulajdonságai (Pascal-zokni, ...)
- Hipergeometrikus eloszlás tulajdonságai

VII. Alkalmazás; történet:

- Hipergeometrikus eloszlás: lottó
- Pascal-háromszög először kr. u. 1000 körül, Indiában