23. tétel: Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje.

I. Permutáció

	Ismétlés nélküli permutáció	Ismétléses permutáció
Definíció	Adott n különböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem egy ismétlés nélküli permutációjának nevezzük. Jele: P_n	Adott n elem, amelyek között k_1 db egyenlő, másik k_2 db egyenlő, ... másik k_s db egyenlő, ahol $k_v \geq 2$, ha $v = 1,2,..,s$ $k_1 + k_2 + ... + k_s \leq n$. Az adott n elem egy meghatározott sorrendje. Jele: $P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)}$
Képlet/darabszám	n!	$P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)} = \frac{n!}{k_1!k_2!..k_s!}$
Bizonyítás	Konstruálás vagy teljes indukció	$k_1!k_2!..k_s!P_n^{(k_1,k_2,...,k_s)} = P_n = n!$

- Ciklikus permutáció: nem lineáris, hanem kör menti elhelyezések száma (n-1)!
- Permutáció, mint művelet: sorba rendezett elemeken elvégezve más sorrendben lesznek (+ identitás), ismétlés nélküli permutációval megfeleltethetők
- Permutációszám (inverziószám): adott számsorban azon számpárok száma, melyek fordított sorrendben vannak egymáshoz képest
- Permutációparitás: permutációszám paritása

II. Variáció

	Ismétlés nélküli variáció	Ismétléses variáció
Definíció	Adott n különböző elem, közülük k elemet $(0 < k \leq n)$ úgy választunk ki, hogy mindegyik elem csak egyszer szerepel, és a kiválasztás sorrendje is számít, az n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. Jele: V_n^k	Adott n különböző elem közülük k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet és a kiválasztás sorrendje is számít, az n elem k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk. Jele: $V_n^{k,i}$
Képlet/darabszám	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$	$V_n^{k,i} = n^k$
Bizonyítás	Leszámolás, átalakítás	k hely mindegyikére n kerülhet

III. Binomiális eloszlás

- Definíció: Az η valószínűségi változót n, p paraméterű binomiális eloszlásúnak nevezzük, ha η lehetséges értékei 0,1,...,n és
$$P(\eta = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$
- Visszatevéses mintavétel: N tárgy, M jó, M/N=p, n húzás visszatevéssel, k jó lesz
- Akkor is használható, ha nem ismert az alaphalmaz elemszáma és a jók száma, de p igen
- Bizonyítás: tényleg eloszlás, binomiális tétel ($\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = (a+b)^n$) alapján bizonyítás, ha a=p és b=1-p
- Várható érték: E(X)=np
- Szórásnégyzet: D^2(X)=np(1-p)
- Bernoulli-eloszlás: speciális eset, n=1 (pl. 1 érmefeldobás)

IV. Geometriai valószínűség modellje

- Véletlen kísérlet elemi eseményeit egy geometriai alakzat pontjainak kiválasztásával modellezzük. Annak valószínűsége, hogy egy pont egy adott geometriai alakzatba esik, arányos az alakzat területével. P(A)=cT, ahol c=t/T.
- Korlátos, mérhető (n-dimenziós) alakzat, mint eseménytér (A), ennek mérhető részhalmazait eseményeknek feleltetjük meg (E). P(E)=T(E)/T(A)
- Klasszikus valószínűség kiterjesztése: P=T(jó alakzat)/T(teljes alakzat)
- 0 valószínűségű egy pont, de nem lehetetlen
- Eloszlásfüggvény: F(x)=P(X<x), ahol x a függvény argumentuma, X valószínűségi változó

Tegyük föl, hogy a céltáblát biztosan eltaláljuk.
Számítsuk ki először mondjuk annak valószínűségét, hogy

$$P(X<10)=\frac{t}{T}=\frac{10^2\cdot\pi}{50^2\cdot\pi}=0{,}04$$

Hasonlóan izgalmas módon például

$$P(X<20)=\frac{t}{T}=\frac{20^2\cdot\pi}{50^2\cdot\pi}=0{,}16$$

Ezek alapján próbáljuk meg általánosan meghatározni azt a valószínűséget, hogy

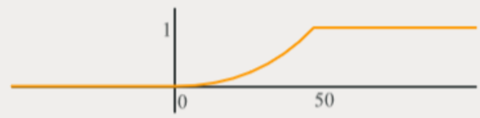
$$P(X<x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x\le 0\\ \frac{x^2}{2500} & \text{ha} \quad 0<x\le 50\\ 1 & \text{ha} \quad 50<x\end{cases}$$

Ez, amit így kaptunk nem más, mint egy függvény, aminek képlete:
$x \mapsto P(X<x)$

Ezt a függvényt az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük, és $F(x)$-el jelöljük.
Nézzük meg.

AZ ELOSZLÁSFÜGGVÉNY: $F(x)=P(X<x)$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x\le 0\\ \frac{x^2}{2500} & \text{ha} \quad 0<x\le 50\\ 1 & \text{ha} \quad 50<x\end{cases}$$



- Hasznos: egyszerű, folyamatos valószínűséges feladatok (pl. két ember találkozik)
- Paradoxonok: különböző véletlen-modellek egy tulajdonságra
  - Bertrand-paradoxon: Húr legyen hosszabb, mint a beírt szabályos háromszög oldala (adott pontból szög 1/3; átmérőre merőleges 2/3; húr felezőpontja 1/4)
  - Feloldás: Nincs konkrétan meghatározva, hogy mi a véletlenszerű objektum, nem konkrét terület az eseménytéren

V. Tételek/Bizonyítások

- Binomiális eloszlás képletei
  - Mit modellez, valóban eloszlás
  - Várható érték, szórás
- Ismétléses permutáció képlete

VI. Alkalmazás

- Permutáció, variáció: kombinatorikai problémák
- Permutáció paritása: determináns számítás, lineáris algebra
- Titkosírásban: néhány betűnként a sorrend adott permutációval való megkavarása
- Binomiális eloszlás: visszatevéses mintavétel modellezés (pl. selejtek várható értékének megállapítása)
- Geometriai valószínűség: célbalövésnél várható pontszám
- Geometriai valószínűség: kvantumfizikában részecskék elhelyezkedése a sebesség függvényében